Chapitre 15 : compléments sur les variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I)Suite de variables aléatoires indépendantes

Déf : les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont dites deux à deux indépendantes si X_i et X_j sont indépendantes pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$.

Déf : les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont dites mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1,...,x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$, on a :
$P(X_1 = x_1 \cap ... \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)...P(X_n = x_n)$.

Propriété 1
Si X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, elles sont 2 à 2 indépendantes.

Propriété 2 (lemme des coalitions)
Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Alors, toute fonction de certaines d'entre elles est une variable aléatoire indépendante de toute fonction des autres.

Exemple
Si X_1, ..., X_5 sont mutuellement indépendantes, alors $Y = X_1 + X_2^3$ et $Z = 2X_3 - X_4 + X_5^2$ sont indépendantes.

Déf : on dit que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si en prenant un nombre fini d'entre elles, on obtient toujours des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

II)Somme de variables aléatoires discrètes

Théorème 1 (loi d'une somme)
Soient X et Y des variables aléatoires discrètes. Soit $S = X + Y$.

1)$\forall s \in S(\Omega),\ P(S = s) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \cap Y = s - x)$.

2)$\forall s \in S(\Omega),\ P(S = s) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = s - y \cap Y = y)$.

✓ Pour trouver la loi de $X + Y$, il est donc nécessaire de connaître la loi du couple (X, Y).

Exercice 1
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi donnée par :

$P(X = 0 \cap Y = 1) = \dfrac{1}{10}$, $P(X = 0 \cap Y = 2) = 0$, $P(X = 0 \cap Y = 3) = 0$,

$P(X = 1 \cap Y = 1) = \dfrac{4}{10}$, $P(X = 1 \cap Y = 2) = \dfrac{2}{10}$, $P(X = 1 \cap Y = 3) = 0$,

$P(X = 2 \cap Y = 1) = \dfrac{1}{10}$, $P(X = 2 \cap Y = 2) = \dfrac{1}{10}$, $P(X = 2 \cap Y = 3) = \dfrac{1}{10}$.

1)Déterminer les lois marginales.

2)Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Théorème 2 (linéarité de l'espérance - généralisation)
Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires admettant une espérance.
Alors, $X_1 + ... + X_n$ admet une espérance donnée par :
$E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.

Théorème 3 (généralisation)
Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance.
Alors, $X_1 + ... + X_n$ admet une variance donnée par :
$V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$.

✓ Si X_1, ..., X_n ne sont pas mutuellement indépendantes, cette égalité est fausse. On peut montrer que $V(X_1 + ... + X_n)$
$= V(X_1) + ... + V(X_n) + 2 \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i, X_j)$.

Théorème 4 (stabilité de la loi binômiale pour l'addition)
Soient X_1, ..., X_r des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in [\![1, r]\!] : X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n_i, p)$.
Alors, $X_1 + ... + X_r \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ avec $n = n_1 + ... + n_r$.

Théorème 5 (stabilité de la loi de Poisson pour l'addition)
Soient X_1, ..., X_r des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in [\![1, r]\!] : X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_i)$.
Alors, $X_1 + ... + X_r \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_r$.

III)Maximum et minimum de variables aléatoires discrètes

Déf : soient X et Y des variables aléatoires discrètes.
On appelle maximum de X et Y la variable aléatoire discrète, notée $max(X, Y)$ et définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ max(X, Y)(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} X(\omega) & si & X(\omega) \geq Y(\omega), \\ Y(\omega) & si & Y(\omega) \geq X(\omega). \end{array} \right.$$

On appelle minimum de X et Y la variable aléatoire discrète, notée $min(X, Y)$ et définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ min(X, Y)(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} X(\omega) & si & X(\omega) \leq Y(\omega), \\ Y(\omega) & si & Y(\omega) \leq X(\omega). \end{array} \right.$$

<u>Exercice 2</u>
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$.
1)Déterminer la loi de $M = max(X, Y)$.
2)Déterminer la loi de $N = min(X, Y)$.
3)Quelle est la loi de $S = M + N$?

Propriété 3
Soient X et Y des variables aléatoires discrètes.
Soient $M = max(X, Y)$ et $N = min(X, Y)$.

1)$\forall k \in M(\Omega),\ (M \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$.

2)$\forall k \in N(\Omega),\ (N > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.

✓ Cette propriété permet de construire un lien entre les fonctions de répartition de M et N et celles de X et Y.

<u>Exercice 3</u>

Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire au hasard 2 boules avec remise.
On introduit les variables aléatoires suivantes :
X =numéro de la première boule tirée.
Y =numéro de la seconde boule tirée.
M =plus grand des 2 numéros obtenus.
N =plus petit des 2 numéros obtenus.

1)Reconnaître la loi de X et la loi de Y.
2)Montrer que la fonction de répartition F de M est donnée par :
$\forall k \in [\![1, n]\!] : F(k) = \dfrac{k^2}{n^2}$. En déduire la loi de M.

3)Montrer que la fonction de répartition G de N est donnée par :
$\forall k \in [\![1, n]\!] : G(k) = 1 - \dfrac{(n-k)^2}{n^2}$. En déduire la loi de N.

Déf (généralisation) : soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires discrètes.
On appelle maximum de X_1, ..., X_n la variable aléatoire discrète, notée $max(X_1, ..., X_n)$ et définie par :
$\forall \omega \in \Omega,\ max(X_1, ..., X_n)(\omega) = max(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$
On appelle minimum de X_1, ..., X_n la variable aléatoire discrète, notée $min(X_1, ..., X_n)$ et définie par :
$\forall \omega \in \Omega,\ min(X_1, ..., X_n)(\omega) = min(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

Propriété 4

Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires discrètes.
Soient $M = max(X_1, ..., X_n)$ et $N = min(X_1, ..., X_n)$.
1)$\forall k \in M(\Omega),\ (M \leq k) = (X_1 \leq k) \cap ... \cap (X_n \leq k)$.
2)$\forall k \in N(\Omega),\ (N > k) = (X_1 > k) \cap ... \cap (X_n > k)$.