Exercice 1 (ecricome 2014) **(Original modifié !)**

Partie I : réduction de l'endomorphisme f

1)• $Kerf = \{t \in \mathbf{R}^3 | f(t) = 0\}$.

Soit $t = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$f(t) = 0 \iff AT = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$

En injectant au départ :

$$\begin{aligned} Kerf &= \{(x, y, z) | x = 0 \text{ et } z = -2y\} \\ &= \{(0, y, -2y), y \in \mathbf{R}\} \\ &= \text{Vect}\big((0, 1, -2)\big) \\ &= Vect(u). \end{aligned}$$

(u) est une famille génératrice de $Kerf$. Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non-nul. C'est donc une base de $Kerf$.

• Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, le vecteur colonne de $f(e_i)$ est la i-ième colonne de A.
Donc $f(e1) = (1, 1, 2)$, $f(e2) = (0, 2, -2)$ et $f(e3) = (0, 1, -1)$.
Le cours donne alors :

$$\begin{aligned} Im(f) &= \text{Vect } (f(e1), f(e2), f(e3)) \\ &= \text{Vect } ((1, 1, 2), (0, 2, -2), (0, 1, -1)) \\ &= \text{Vect } ((1, 1, 2), (0, 1, -1)) \text{ car } (0, 2, -2) \text{ et } (0, 1, -1) \text{ sont colinéaires.} \end{aligned}$$

$\big((1, 1, 2), (0, 2, -2)\big)$ est une famille génératrice de Im f. Elle est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de Imf.

2)$Kerf \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective donc f n'est pas bijective.
Comme $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$, alors A n'est pas inversible, ce qui prouve que 0 est valeur propre de A.

3)• Transformons $A - \lambda I$ en une matrice triangulaire par Gauss.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3+\lambda & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (1+\lambda)L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } A &\Longleftrightarrow A–\lambda I \text{ n'est pas inversible}\\ &\Longleftrightarrow 1-\lambda = 0 \text{ ou } \lambda-\lambda^2=0\\ &\Longleftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 0.\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 1.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A-I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z \end{array}\right.$$

En injectant au départ :

$$E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } z = -y\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.

Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non-nul. C'est donc une base de $E_1(A)$ et $dim E_1(A) = 1$.

• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AU = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & -2y \end{array}\right.$$

En injectant au départ :

$$E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } z = -2y\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$.

Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non-nul. C'est donc une base de $E_0(A)$ et $dimE_0(A) = 1$.

• $dimE_0(A) + dimE_1(A) = 2 < 3$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Donc A n'est pas diagonalisable d'après le théorème de réduction.

4) • D'après la question 1), on sait que $u \in Kerf$ donc $f(u) = 0$.

• Le vecteur colonne de $f(v)$ dans la base canonique est AV.

Or, $AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = V$.

Donc $f(v) = v$.

Remarque
V est le vecteur trouvé dans la question 3).

5)Le vecteur colonne de $f(t)$ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+2y+z \\ 2x-2y-z \end{pmatrix}.$$

Donc $f(t) = (x, x+2y+z, 2x-2y-z)$.

$$\begin{aligned}
f(t) = t + v &\iff (x, x+2y+z, 2x-2y-z) = (x,y,z) + (0,1,-1) \\
&\iff (x, x+2y+z, 2x-2y-z) = (x, y+1, z-1) \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + z = y+1 \\ 2x - 2y - z = z-1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 1 - z & L_1 \\ 2x - 2y = -1 + 2z & L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 1 - z & L_1 \\ 4x = 1 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 3/4 - z \\ x = 1/4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les vecteurs t cherchés sont donc de la forme $t = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} - z, z\right)$ où z est un réel quelconque.

6)La 3ème colonne de T suggère de choisir w de sorte que $f(w) = 1v + 1w$, c'est-à-dire $f(w) = w + w$. Compte-tenu de la question 5), cela impose de choisir w de la forme $t = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} - z, z\right)$.

La contrainte imposée par l'énoncé étant que la 3ème coordonnée de w est nulle, on prend $z = 0$. Donc $w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$.

La famille (u, v, w) est libre. En effet, pour tous réels a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} au + bv + cw = 0 &\iff a(0,1,-2) + b(0,1,-1) + c\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right) = (0,0,0) \\ &\iff \left(\frac{1}{4}c, a + b + \frac{3}{4}c, -2a - b\right) = (0,0,0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & \frac{1}{4}c & = & 0 \\ a & + & b & + & \frac{3}{4}c & = & 0 \\ -2a & - & b & & & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

(u, v, w) est une famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 tout comme la dimension de $\mathbf{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

$f(u) = 0 = 0u + 0v + 0w$,

$f(v) = v = 0u + 1v + 0w$,

$f(w) = v + w = 0u + 1v + 1w$.

La matrice de f dans la base (u, v, w) est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

Partie II : résolution d'une équation

1)Comme $g \circ g = f$, on a : $f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f$

On déduit :

$$\begin{aligned} f(g(u)) &= (f \circ g)(u) \\ &= (g \circ f)(u) \text{ car } f \circ g = g \circ f \\ &= g(f(u)) \\ &= g(0) \text{ car } u \in Kerf \\ &= 0 \text{ car } g \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g(v)) &= (f \circ g)(v) \\ &= (g \circ f)(v) \\ &= g(f(v)) \\ &= g(v) \text{ car } f(v) = v. \end{aligned}$$

2)$f(g(u)) = 0$ donc $g(u) \in Kerf = \text{Vect}\,(u)$. Donc $\exists a \in \mathbf{R}, g(u) = au$.

$f(g(v)) = g(v)$ donc $g(v) \in E_1(f) = \text{Vect}\,(v)$. Donc $\exists b \in \mathbf{R}, g(v) = bv$.

3)$g(u) = au = au + 0v + 0w$,

$g(v) = bv = 0u + bv + 0w$,

$g(w)$ est inconnu, il est CL de u, v et w de la forme : $g(w) = cu + dv + ew$.

Ainsi, la matrice de g dans la base (u, v, w) est $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = N$.

$$\begin{aligned} 4)g \circ g = f &\iff \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(g \circ g) = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f) \\ &\iff (\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(g))^2 = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f) \\ &\iff N^2 = T \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c(a+e) \\ 0 & b^2 & d(b+e) \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 & = & 0 \\ c(a+e) & = & 0 \\ b^2 & = & 1 \\ d(b+e) & = & 1 \\ e^2 & = & 1. \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b & = & \pm 1 \\ d(b+e) & = & 1 \\ e & = & \pm 1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce système admet plusieurs solutions.
On peut prendre par exemple $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = \frac{1}{2}$ et $e = 1$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les équivalences ci-dessus prouvent que g vérifie $g \circ g = f$.

Exercice 2 (ecricome 2014)

1)Pour tout $x > 0$, on a : $1 + x > 1$ et $\ln(1 + x) > \ln 1$ par croissance de ln.
Donc $\forall x > 0, \ln(1 + x) > 0$, ce qui prouve que $\forall x > 0, f(x) > 0$.
De plus, $f(0) = 1 > 0$.
Ainsi, $\forall x \geq 0, f(x) > 0$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n > 0$.

$\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = e$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $un > 0$.
Comme f est définie sur $\mathbf{R}_+$, $f(un)$ existe donc u_{n+1} existe.
De plus, $f(un) > 0$ puisque f est strictement positive sur $\mathbf{R}_+$.
Donc $u_{n+1} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

2)programme :

```
import numpy as np
def f(x):
    y=x/np.log(1+x)
    return y
N=int(input("entrer N"))
u=np.exp(1)
for k in range(N):
    u=f(u)
print(u)
```

3)f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la composée et le quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'après le cours, $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$. Donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui établit la continuité de f à droite en 0.

On conclut que f est continue sur $[0, +\infty[$.

4)f est C^1 sur $]0, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la composée et le quotient de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.

5)$\forall x > 0, \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} = \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x \ln(1 + x)}$.

$\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$ donc $x \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x^2$.

$$x - \ln(1 + x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} - o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Par quotient d'équivalents, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Donc f est dérivable (à droite) en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

6)• $$\begin{aligned} f(x) \leq x &\iff \frac{x}{\ln(1+x)} \leq x \\ &\iff \frac{x}{\ln(1+x)} - x \leq 0 \\ &\iff \frac{x - x\ln(1+x)}{\ln(1+x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x\big(1-\ln(1+x)\big)}{\ln(1+x)} \leq 0 \\ &\iff 1-\ln(1+x) \leq 0 \\ &\iff \ln(1+x) \geq 1 \\ &\iff 1+x \geq e \\ &\iff x \geq e-1. \end{aligned}$$

• $$\begin{aligned} (x+1)\ln(x+1) \geq x+1 &\iff (x+1)\ln(x+1)-(x+1) \geq 0 \\ &\iff (x+1)\left(\ln(x+1)-1\right) \geq 0 \\ &\iff \ln(x+1)-1 \geq 0 \\ &\iff x \geq e-1. \end{aligned}$$

• $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{\left(\ln(1+x)\right)^2} = \dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)\left(\ln(1+x)\right)^2}$.

Pour tout $x \geq e-1$, on a : $1+x \geq e$, puis $\ln(1+x) \geq \ln e$ par croissance de ln, ce qui donne $\ln(1+x) \geq 1$.
On a alors $(1+x)\ln(1+x) \geq 1+x$, puis $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 1 > 0$.

Par ailleurs, $(1+x)\left(\ln(1+x)\right)^2 > 0$.

Par quotient, $\forall x \geq e-1, f'(x) > 0$.

7)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $e-1 \leq u_n$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = e \geq e-1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $e-1 \leq u_n$.
D'après la question 6), f est croissante sur $[e-1, +\infty[$.
Donc $f(e-1) \leq f(u_n)$.

Or $f(e-1) = \dfrac{e-1}{\ln e} = e-1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

Donc $e-1 \leq u_{n+1}$ ce qui prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, e-1 \leq u_n$.

8)On sait que $\forall x \geq e-1, f(x) \leq x \quad (*)$.
Comme $\forall n \in \mathbf{N},\ un \geq e-1$, on peut remplacer x par u_n dans $(*)$, ce qui donne :
$\forall n \in \mathbf{N}, f(un) \leq u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Etant minorée (par e-1), elle est donc convergente vers L.

Par passage à la limite, on peut dire que $L \geq e-1$.

f est continue sur $[e-1, +\infty[$ donc en L.
D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Or, $f(x) = x \Longleftrightarrow \dfrac{x\big(1-\ln(1+x)\big)}{\ln(1+x)} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = e-1$.

Comme $L \leq e-1$, la solution $L = 0$ ne convient pas.
Donc $L = e-1$.

Exercice 3 (ecricome 2014)

Partie I : étude d'une première expérience

1)a)programme :

```
import numpy.random as rd
def lancer(p):
    a=rd.random()
    if a<p:
        y=1
    else:
        y=0
    return y
```

b)programme :

```
def premierpile(p):
    n=1
    while lancer(p)==0:
        n=n+1
    return n
```

c)programme :

```
p=float(input("entrer p"))
n=premierpile(p)
m=premierpile(p)
print(n+m-2)
```

2)L'expérience aléatoire est constituée de n épreuves (=lancers) successives, identiques et indépendantes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès (=pile) vaut p.
X_n compte le nombre de succès.
Donc $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
On a donc $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!], P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Le cours donne : $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = npq$.

3)$Y(\Omega) = \mathbf{N}$.

4)$P(Y=0) = P(P_1 \cap P_2)$
$= P(P_1)P(P_2)$ par indépendance
$= p^2$.

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= P\big((F_1\cap P_2\cap P_3)\cup(P_1\cap F_2\cap P_3)\big)\\
&= P(F_1\cap P_2\cap P_3)+P(P_1\cap F_2\cap P_3) \text{ par incompatibilité}\\
&= P(F_1)P(P_2)P(P_3)+P(P_1)P(F_2)P(P_3) \text{ par indépendance}\\
&= qpp+pqp\\
&= 2p^2q.
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y=2) &= P\big((F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)\cup(P_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4)\big)\\
&= qqpp+qpqp+pqqp\\
&= 3p^2q^2
\end{aligned}$$

5)L'événement $(Y=n)$ est réalisé si et seulement si les $n+2$ premiers lancers amènent exactement n FACE et 2 PILE dont 1 PILE au $n+2$-ième lancer.
Ceci est réalisé si et seulement si les $n+1$ premiers lancers amènent exactement 1 PILE et le $n+2$-ième lancer amène 1 PILE.
Donc $(Y=n)=(X_{n+1}=1)\cap\overline{F_{n+2}}$.

6)
$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= P\left(X_{n+1}=1\cap\overline{F_{n+2}}\right)\\
&= P(X_{n+1}=1)P(\overline{F_{n+2}}) \text{ par indépendance } (*)\\
&= \binom{n+1}{1}p^1q^{(n+1)-1}p \quad\text{car } X_{n+1}\hookrightarrow\mathscr{B}(n+1,p)\\
&= (n+1)p^2q^n.
\end{aligned}$$

$(*)$ indépendance des $n+1$ premiers lancers et du $n+2$-ième lancers.

7)Pour tout $N\in\mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}P(Y=n) &= \sum_{n=0}^{N}(n+1)p^2q^n\\
&= \sum_{i=1}^{N+1}ip^2q^{i-1} \text{ en posant } i=n+1 \text{ ou } n=i-1.\\
&= p^2\sum_{i=1}^{N+1}iq^{i-1}.
\end{aligned}$$

La série de terme général iq^{i-1} converge car c'est une série dérivée première de paramètre $q\in]0,1[$.

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N+1}iq^{i-1}=\sum_{i=1}^{+\infty}iq^{i-1}=\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}$.

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}P(Y=n)=p^2\times\frac{1}{p^2}=1$, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)=1$.

8)Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} nP(Y=n)$ est absolument convergente.

Comme $\forall n \in \mathbf{N}, nP(Y=n) \geq 0$, cela revient à montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} nP(Y=n)$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} nP(Y=n) &= \sum_{n=0}^{N} n(n+1)p^2q^n \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} (i-1)ip^2q^{i-1} \text{ en posant } i=n+1 \text{ ou } n=i-1. \\ &= p^2q\sum_{i=1}^{N+1} i(i-1)q^{i-2}.\end{aligned}$$

La série de terme général $i(i-1)q^{i-2}$ converge car c'est une série dérivée seconde de paramètre $q \in]0,1[$.

Donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N+1} i(i-1)q^{i-2} = \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1)q^{i-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}$.

Donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} nP(Y=n) = p^2q \times \frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p}$.

9)$Y_k(\Omega) = \mathbf{N}$.

En prenant modèle sur les questions 5) et 6), on a :

$(Y_k = n) = (X_{n+k-1} = k-1) \cap \overline{F_{n+k}}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } P(Y_k=n) &= P\left(X_{n+k-1} = k-1 \cap \overline{F_{n+k}}\right) \\ &= P(X_{n+k-1} = k-1)P(\overline{F_{n+k}}) \text{ par indépendance} \\ &= \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1}q^{(n+k-1)-(k-1)}p \ \text{ car } X_{n+k-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+k-1,p) \\ &= \binom{n+k-1}{k-1} p^k q^n.\end{aligned}$$

Partie II : étude d'une seconde expérience

1)$R \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Le cours donne :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, F_S(x) &= P(S \le x) \\ &= P(1 - R \le x) \\ &= P(R \ge 1 - x) \\ &= 1 - P(R < 1 - x) \\ &= 1 - P(R \le 1 - x) \text{ car } R \text{ est à densité} \\ &= 1 - F_R(1 - x) \\ &= \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } 1 - x < 0 \\ 1 - (1 - x) & \text{si } 0 \le 1 - x \le 1 \\ 1 - 1 & \text{si } 1 - x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $S \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

2)Pour tout t réel, on a : $(T \le t) = (R \le t) \cap (S \le t)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(T \le t) &= P(R \le t \cap S \le t) \\ &= P\big((R \le t) \cap (1 - R \le t)\big) \\ &= P\big((R \le t) \cap (R \ge 1 - t)\big). \end{aligned}$$

3)D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(T \le t) &= P(1 - t \le R \le t) \\ &= F_R(t) - F_R(1 - t) \text{ car } 1 - t \le t \text{ du fait que } t \ge \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or, $F_R(t) = t$ puisque $\frac{1}{2} \le t \le 1$

Et $F_R(1 - t) = 1 - t$ puisque $\frac{1}{2} \le t \le 1$ (et donc $0 \le 1 - t \le \frac{1}{2}$).

Donc $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], P(T \le t) = t - (1 - t)$, c'est-à-dire $F_T(t) = 2t - 1$.

4)• si $\frac{1}{2} \le t \le 1$, on a vu que $F_T(t) = 2t - 1$.

• si $t > 1$, alors $1 - t < 0$.
L'événement $(1 - t \le R \le t)$ est alors certain puisque $R(\Omega) = [0,1]$.
Donc $P(1 - t \le R \le t) = 1$, c'est-à-dire $F_T(t) = 1$.

• si $t < \frac{1}{2}$, alors $1 - t > \frac{1}{2}$.
L'événement $(1 - t \le R \le t)$ est alors impossible.
Donc $P(1 - t \le R \le t) = 0$, c'est-à-dire $F_T(t) = 0$.

Finalement, on a : $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 2t - 1 = \dfrac{t - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Donc $T \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

5)Le cours donne : $E(T) = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \dfrac{3}{4}$ et $V(T) = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{12} = \dfrac{1}{48}$.