correction DS4

Exercice 1

Partie A (étude d'une première fonction)

1)a)g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables.

$\forall x>0,\ g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ par croissances comparées.

c)$\forall x>0,\ g'(x)\geq 0\iff 1-\ln x\geq 0\iff \ln x\leq 1\iff x\leq e$.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2)a)g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions C^2.

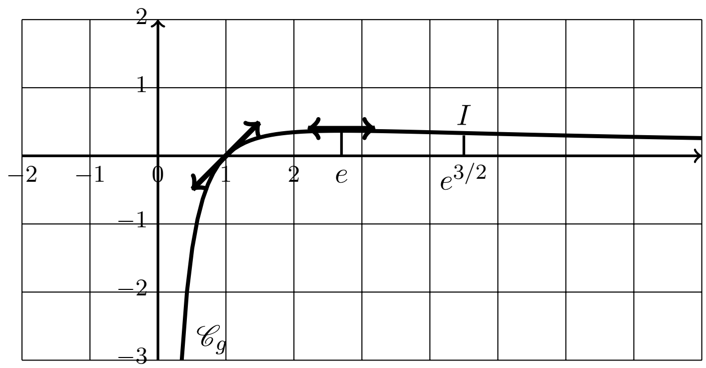
$\forall x>0,\ g''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-3x+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$.

b)$\forall x>0,\ g''(x)\geq 0\iff -3+2\ln x\geq 0\iff \ln x\geq\dfrac{3}{2}\iff x\geq e^{\frac{3}{2}}$.

Donc g est convexe sur $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right[$ et concave sur $\left]0,e^{\frac{3}{2}}\right]$.

$\mathscr{C}_g$ possède donc un unique point d'inflexion I d'abscisse $e^{\frac{3}{2}}$.

c)T a pour équation : $y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$.



Partie B (étude d'une deuxième fonction)

3)φ est la composée de la fonction $x \mapsto \ln x$, suivie de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Elles sont toutes les deux continues et croissantes sur leur domaine de définition.

Par composée, φ est continue et croissante sur $[1, +\infty[$.

4) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x-1}$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

Cependant, $\ln x \underset{1}{\sim} x-1$ donc $\sqrt{\ln x} \underset{1}{\sim} \sqrt{x-1}$.

D'où $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x-1} \underset{1}{\sim} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ ou encore $\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x-1} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

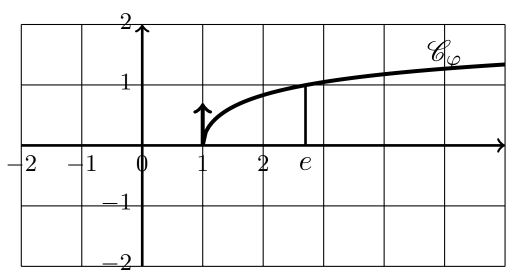
$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x-1} = +\infty$.

On vient de montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = +\infty$.

Cela prouve que φ n'est pas dérivable (à droite) en 1.

De plus, $\mathscr{C}_\varphi$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

5)



Partie C (étude d'une famille de fonctions)

6)$\forall x > 0,\ h_c'(x) = \dfrac{1}{x} - c = \dfrac{1-cx}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} cx = 0$.

Par différence, $\lim\limits_{x \to 0^+} h_c(x) = -\infty$.

7)a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} cx = -\infty$ car $c \leq 0$.

Par différence, $\lim\limits_{x \to +\infty} h_c(x) = +\infty$.

b)$\forall x > 0,\ h_c'(x) = \dfrac{1-cx}{x} > 0$ car $c \leq 0$.

Donc h_c est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

h_c est continue sur $]0,+\infty[$ comme différence de fonctions continues.

Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to0^+} h_c(x), \lim\limits_{x\to+\infty} h_c(x)[= \mathbf{R}$.

0 admet donc un unique antécédent $\alpha_c > 0$ par h_c.

Ainsi, il existe un unique réel $\alpha_c > 0$ tel que $h_c(\alpha_c) = 0$.

$h_c(1) = -c \geq 0$ donc $h_c(\alpha_c) \leq h_c(1)$.

h_c étant strictement croissante, cela entraîne que $\alpha_c \leq 1$.

D'où $0 < \alpha_c \leq 1$.

c)Comme h_c est strictement croissante et s'annule en α_c, on a :

$\forall x \in]0, \alpha_c[,\ h_c(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha_c, +\infty[,\ h_c(x) > 0$.

8)a)Cette fois ci, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} cx = +\infty$ car $c > 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h_c(x)$ est donc une forme indéterminée du type « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

On la lève en écrivant : $\forall x > 0,\ h_c(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - c\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - c\right) = -c < 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_c(x) = -\infty$.

b)$\forall x >,\ h_c'(x) \geq 0 \iff 1 - cx \geq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{c}$.

x	0		$\frac{1}{c}$		$+\infty$
$h_c'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_c(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln c - 1$	$\searrow$	$-\infty$

$h_c\left(\dfrac{1}{c}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{c}\right) - c \times \dfrac{1}{c} = -\ln c - 1$.

c)$c > \dfrac{1}{e} \iff \ln c > \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) \iff \ln c > -1 \iff -\ln c - 1 < 0$.

Le minimum de h_c sur $]0,+\infty[$ est donc négatif.

On déduit que si $c > \dfrac{1}{e}$, on a : $\forall x > 0,\ h_c(x) < 0$.

d1)Comme $c < \dfrac{1}{e}$, on a cette fois : $-\ln c - 1 > 0$.

Le maximum de h_c est donc positif.

Compte tenu du tableau de variations, h_c doit donc s'annuler deux fois. Rédigeons ...

• h_c est continue et strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{c}\right]$. Elle réalise donc une bijection de $\left]0, \dfrac{1}{c}\right]$ sur $]-\infty, -\ln c - 1]$.

$0 \in]-\infty, -\ln c - 1]$ car $-\ln c - 1 > 0$.

0 admet donc un unique antécédent β_c dans $\left]0, \dfrac{1}{c}\right]$ par h_c.

Donc l'équation $h_c(x) = 0$ admet une unique solution β_c sur $\left]0, \dfrac{1}{c}\right]$.

• De même, h_c est une bijection de $\left[\dfrac{1}{c}, +\infty\right[$ sur $]-\infty, -\ln c - 1]$.

Donc l'équation $h_c(x) = 0$ admet une unique solution γ_c sur $\left[\dfrac{1}{c}, +\infty\right[$.

• $h_c(1) = -c < 0$, $h_c(\beta_c) = 0$ et $h_c(e) = 1 - ce > 0$.
Donc $h_c(1) < h_c(\beta_c) < h_c(e)$.

h_c est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{c}\right]$ donc sur $[1, e]$ car $e < \dfrac{1}{c}$.

On conclut que $1 < \beta_c < e$.

Enfin, comme $\gamma_c \in \left[\dfrac{1}{c}, +\infty\right[$ et que $e < \dfrac{1}{c}$, on a : $e < \gamma_c$.

Ainsi, on a : $1 < \beta_c < e < \gamma_c$.

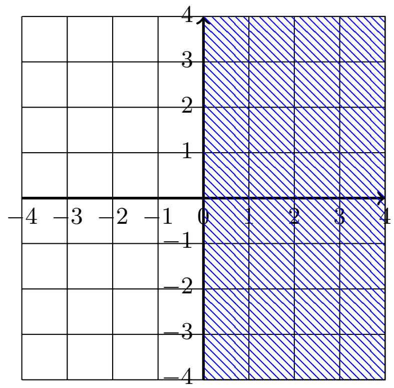
d2)On complète le tableau de variations dressé en 8)b) :

x	0		β_c		$\dfrac{1}{c}$		γ_c		$+\infty$
$h_c(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\ln c - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On conclut que
$\forall x \in]\beta_c, \gamma_c[\,,\ h_c(x) > 0$ et $\forall x \in]0, \beta_c[\cup]\gamma_c, +\infty[\,,\ h_c(x) < 0$.

Partie D (étude d'une fonction de deux variables)

9)U est le demi-plan ouvert d'abscisses positives (zone hachurée).



10)• g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, d'après la question 2)a).
Donc la fonction $(x,y)\mapsto g(x)$ est de classe C^2 sur U.

De plus, les fonctions $(x,y)\mapsto y^2$ et $(x,y)\mapsto x$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur U .

Par quotient, la fonction $(x,y)\mapsto \dfrac{y^2}{x}$ est de classe C^2 sur U .

Par différence, f est de classe C^2 sur U.

• f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur U données par :

$\partial_1 f(x,y) = g'(x) + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2}$

$\partial_2 f(x,y) = 0 - \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{2y}{x}$

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial_1\left(\partial_1 f(x,y)\right) = g''(x) - \dfrac{2y^2}{x^3} = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3} - \dfrac{2y^2}{x^3}$

$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1\left(\partial_2 f(x,y)\right) = \dfrac{2y}{x^2}$

$\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial_2\left(\partial_1 f(x,y)\right) = 0 + \dfrac{2y}{x^2} = \dfrac{2y}{x^2}$

$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \partial_2\left(\partial_2 f(x,y)\right) = -\dfrac{2}{x}.$

11)a)Les points critiques de f sur U sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1-\ln x}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{2y}{x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-\ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = e \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc le seul point critique de f sur U est $(e,0)$.

b)La matrice hessienne de f en un point (x, y) de U vaut :

$$\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+2\ln x}{x^3} - \dfrac{2y^2}{x^3} & \dfrac{2y}{x^2} \\ \dfrac{2y}{x^2} & -\dfrac{2}{x} \end{pmatrix}.$$

La matrice hessienne H de f en $(e, 0)$ vaut donc :

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+2\ln e}{e^3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{e^3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

H est diagonale. Ses valeurs propres sont $-\frac{1}{e^3}$ et $-\frac{2}{e}$, strictement négatives.
Donc f admet en $(e, 0)$ un maximum local.

c)On peut déjà remarquer que $f(e, 0) = \dfrac{\ln e}{e} - \dfrac{0^2}{e} = \dfrac{1}{e}$.

Par ailleurs, comme $\forall (x, y) \in U,\ \dfrac{y^2}{x} \geq 0$, on déduit :
$\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) \leq g(x) \quad (1)$

Enfin, la question 1)c) donne : $\forall x > 0,\ g(x) \leq \dfrac{1}{e} \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on conclut que $\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) \leq \dfrac{1}{e}$
ou encore $\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) \leq f(e, 0)$.
Ainsi, f admet en $(e, 0)$ un maximum global sur U.

12)a)Pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in L_c &\iff f(x, y) = c \\ &\iff \frac{\ln x}{x} - \frac{y^2}{x} = c \\ &\iff \frac{\ln x - y^2}{x} = c \\ &\iff \ln x - y^2 = cx \\ &\iff y^2 = \ln x - cx \\ &\iff y^2 = h_c(x). \end{aligned}$$

b)Quand $c > \dfrac{1}{e}$, on a vu dans la question 8)c) que $\forall x > 0,\ h_c(x) < 0$.

Donc l'équation $y^2 = h_c(x)$ n'a pas de solution. Il n'y a donc d'après la question précédente aucun couple (x, y) dans L_c.

Ainsi, si $c > \dfrac{1}{e}$, L_c est vide !

c)D'après la question 12)a), on a pour tout réel c :

$$L_c = \left\{(x,y) \in U, \ | \ y^2 = h_c(x)\right\}.$$

Etudions les différents cas :

• $c = 0$

$L_0 = \left\{(x,y) \in U, \ | \ y^2 = h_0(x)\right\} = \left\{(x,y) \in U, \ | \ y^2 = \ln x\right\}$.

Comme $y^2 \geq 0$, cela impose que $\ln x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$.

Ainsi, $L_0 = \left\{ (x,y) \in [1,+\infty[\times \mathbf{R}, \ | \ y = \underbrace{\sqrt{\ln x}}_{\varphi(x)} \text{ ou } y = \underbrace{-\sqrt{\ln x}}_{-\varphi(x)} \right\}$.

Graphiquement, L_0 est donc la réunion de la courbes $\mathscr{C}_\varphi$ (voir question 5)) et de sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

• $c = -2$

$L_{-2} = \left\{(x,y) \in U, \ | \ y^2 = h_{-2}(x)\right\}$.

La question 7)c) pour $c = -2$ donne l'existence d'un réel $\alpha = \alpha_{-2} \in]0,1]$ tel que $\forall x \in]0,\alpha[, \ h_{-2}(x) < 0, \ \forall x \in]\alpha,+\infty[, \ h_{-2}(x) > 0$ et $h_{-2}(\alpha) = 0$.

En revenant à la définition de L_{-2}, on voit donc que la condition $y^2 = h_{-2}(x)$ impose que $h_{-2}(x) \geq 0$ donc que $x \in [\alpha,+\infty[$.

Ainsi, $L_{-2} = \left\{ (x,y) \in [\alpha,+\infty[\times \mathbf{R}, \ | \ y = \underbrace{\sqrt{h_{-2}(x)}}_{\psi(x)} \text{ ou } y = \underbrace{-\sqrt{h_{-2}(x)}}_{-\psi(x)} \right\}$.

Graphiquement, L_{-2} est donc la réunion de la courbes $\mathscr{C}_\psi$ et de sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque

Les fonctions h_{-2} et racine étant croissantes, ψ est croissante par composée.

• $c = 1/4$

$L_{1/4} = \left\{(x,y) \in U, \ | \ y^2 = h_{1/4}(x)\right\}$.

La question 8)d2) pour $c = 1/4$ donne l'existence de deux réels $\beta = \beta_{1/4} \in]1,e[$ et $\gamma = \gamma_{1/4} \in]e,+\infty[$ tel que

$\forall x \in \,]\beta,\gamma[\,, \ h_{1/4}(x) > 0, \ \forall x \in \,]0,\beta[\,\cup\,]\gamma,+\infty[\,, \ h_{1/4}(x) < 0$ et $h_{1/4}(\beta) = h_{1/4}(\gamma) = 0$.

En revenant à la définition de $L_{1/4}$, on voit donc que la condition $y^2 = h_{1/4}(x)$ impose que $h_{1/4}(x) \geq 0$ donc que $x \in [\alpha,\beta]$.

Ainsi, $L_{1/4} = \left\{ (x,y) \in [\beta,\gamma] \times \mathbf{R}, \ | \ y = \underbrace{\sqrt{h_{1/4}(x)}}_{\epsilon(x)} \text{ ou } y = \underbrace{-\sqrt{h_{1/4}(x)}}_{-\epsilon(x)} \right\}$.

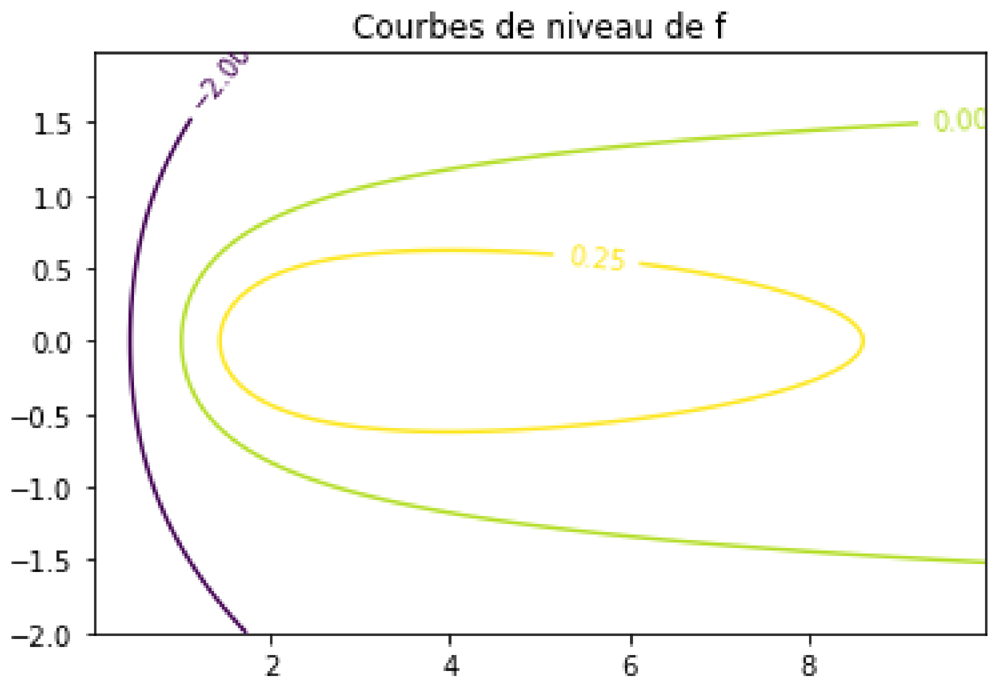
Graphiquement, $L_{1/4}$ est donc la réunion de la courbes $\mathscr{C}_\epsilon$ et de sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque

$h_{1/4}$ est croissante sur $\left[\beta, \dfrac{1}{c}\right]$ c'est-à-dire sur $[\beta, 4]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{c}, \gamma\right]$, c'est-à-dire sur $[\gamma, 4]$.

La racine étant croissantes, ϵ suit les mêmes variations que $h_{1/4}$.

$\mathscr{C}_\epsilon$ est une courbe fermée.



Partie E (étude d'une famille d'intégrales)

13)a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge (intégrale de Riemann de paramètre 1).

Pour tout réel $A \geq 1$, on a :

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^A \frac{1}{x} \times \ln x \; dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^A = \frac{(\ln A)^2}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ diverge.

b)Soit $p \geq 2$, un entier.

$\forall x \geq e,\ \ln x \geq 1$ donc $\forall x \geq e,\ (\ln x)^p \geq \ln x$, puis $\forall x \geq e,\ \dfrac{(\ln x)^p}{x} \geq \dfrac{\ln x}{x}$.

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ diverge.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x}dx$ diverge.

Ainsi, les intégrales $I_{1,p}$ divergent lorsque $p \geq 2$.

14)a)Prenons $n \geq 2$ et $p \in \mathbf{N}$.

On a : $\dfrac{(\ln x)^p}{x^n} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

En effet, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(\ln x)^p}{x^n}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^{n-3/2}} = 0$ par croissances comparées du fait que $n - \frac{3}{2}$ est bien strictement positif.

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$).

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n}dx$ converge.

Ainsi les intégrales $I_{n,p}$ convergent si $n \geq 2$ et $p \in \mathbf{N}$.

b)$\displaystyle I_{n,0} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx = \int_1^{+\infty} x^{-n}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^{-n}dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^A$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right) = \frac{1}{n-1}.$$

En effet, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A^{-n+1}}{-n+1} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{(-n+1)A^{n-1}} = 0$ car $n-1 > 0$ et $A \to +\infty$.

c)Soit $A \geq 1$ un réel. Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}dx$ en posant :

$u(x) = \ln x \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x^2},$

$u'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad v(x) = -\dfrac{1}{x}.$

u et v sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}dx &= \left[\frac{-1}{x} \times \ln x\right]_1^A - \int_1^A -\frac{1}{x^2}dx \\
&= -\frac{\ln A}{A} - \int_1^A -\frac{1}{x^2}dx \\
&= -\frac{\ln A}{A} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^A \\
&= \underbrace{-\frac{\ln A}{A}}_{\to 0 \text{ (cr.comp.)}} - \frac{1}{A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

Donc $I_{2,1} = 1$.

d)Soit $A \geq 1$. Soient $n \geq 2$ et $p \geq 1$ deux entiers.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_1^A \frac{(\ln x)^p}{x^n}dx$ en posant :

$u(x) = (\ln x)^p \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x^n}$

$u'(x) = p \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^{p-1} \qquad v(x) = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$

u et v sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{(\ln x)^p}{x^n}dx &= \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}(\ln x)^p\right]_1^A - \int_1^A p \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{p-1}\frac{x^{-n+1}}{-n+1}dx \\
&= \frac{(\ln A)^p}{(-n+1)A^{n-1}} + \frac{p}{n-1}\int_1^A \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^n}dx \quad (*)
\end{aligned}$$

e) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{(\ln A)^p}{A^{n-1}} = 0$ par croissances comparées.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n}dx$ converge car $n \geq 2$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{(\ln x)^p}{x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n}dx.$

De même, $\displaystyle\int_1^A \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^n}dx$ converge. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^n}dx = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^n}dx.$

Un passage à la limite dans $(*)$ quand $A \to +\infty$ donne alors :

$\forall n \geq 2, \forall p \geq 1,\ I_{n,p} = \dfrac{p}{n-1}I_{n,p-1}.$

f)Soit $\mathscr{P}(p)$ la proposition : « $\forall n \geq 2,\ I_{n,p} = \dfrac{p!}{(n-1)^{p+1}}$ » où $(p \in \mathbf{N})$

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $\forall n \geq 2,\ I_{n,0} = \dfrac{1}{n-1}$ ». C'est vrai, d'après 14)b).

Soit $p \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n,p+1} &= \frac{p+1}{n-1} I_{n,p} \quad \text{en appliquant 14)e) avec } p \to p+1 \\ &= \frac{p+1}{n-1} \times \frac{p!}{(n-1)^{p+1}} \quad \text{par HR} \\ &= \frac{(p+1)!}{(n-1)^{p+2}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \geq 2,\ I_{n,p} = \dfrac{p!}{(n-1)^{p+1}}$.

Exercice 2

Partie A (étude du cas général)

1)• $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est par construction une partie de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

• $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ n'est pas vide car la matrice nulle est dedans.

• Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda M+N) &= \lambda {}^tM + {}^tN \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda M + N \quad \text{car } M\in\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \text{ et } N\in\mathscr{S}_n(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Donc $\lambda M+N \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

$\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est une partie non vide de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2)• $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ {}^tM\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

$f_A(M)$ est donc une matrice obtenue par produit et somme de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, cela reste une matrice de $n\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Ainsi, $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f_A(M)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui montre que f_A est « endo ».

• Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} f_A(\lambda M+N) &= A^t(\lambda M+N)+(\lambda M+N)^tA \\ &= A\left(\lambda^tM+^tN\right)+(\lambda M+N)^tA \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= A\lambda\ {}^tM + A\ {}^tN + \lambda M\ {}^tA + N\ {}^tA \\ &= \lambda\left(A\ {}^tM + M\ {}^tA\right) + \left(A\ {}^tN + N\ {}^tA\right) \\ &= \lambda f_A(M) + f_A(N). \end{aligned}$$

Donc f_A est linéaire.

On conclut que f_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

3)a)Pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t\big(f_A(M)\big) &= {}^t\left(A\ {}^tM + M\ {}^tA\right) \\ &= {}^t\left(A\ {}^tM\right) +^t \left(M\ {}^tA\right) \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= {}^t\left({}^tM\right)\ {}^tA + {}^t\left({}^tA\right)\ {}^tM \quad \text{par transposée d'un produit} \\ &= M\ {}^tA + A\ {}^tM \\ &= A\ {}^tM + M\ {}^tA \\ &= f_A(M). \end{aligned}$$

Donc $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f_A(M)\in\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

b)Par définition, $Imf_A = \{f_A(M),\ M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\}$.

Le calcul précédent prouve que $Imf_A \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

c)$\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ donc $dim\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \leq dim\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

$\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est même strictement inclus dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ puisqu'il existe clairement des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui ne sont pas symétriques.

Cela entraîne que $dim\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) < dim\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \quad (1)$

Enfin, l'inclusion $Imf_A \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ donne : $dimImf_A \leq dim\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \quad (2)$

De (1) et (2), on conclut que $dimImf_A < dim\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On conclut que $Imf_A \neq dim\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Donc f_A n'est pas surjective.

Ainsi, f_A n'est pas bijective.

4)a)Soit $N \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

$f_A\left(\dfrac{1}{2}N\ {}^t\left(A^{-1}\right)\right)$

$= A\ {}^t\left(\dfrac{1}{2}N\ {}^t\left(A^{-1}\right)\right) + \left(\dfrac{1}{2}N\ {}^t\left(A^{-1}\right)\right)\ {}^tA$

$= A\ {}^t\left({}^t\left(A^{-1}\right)\right)^t\left(\dfrac{1}{2}N\right) + \dfrac{1}{2}N\ {}^t\left(A^{-1}\right)\ {}^tA$ en transposant le produit

$= AA^{-1}\dfrac{1}{2}N + \dfrac{1}{2}N\left({}^tA\right)^{-1}\ {}^tA$ en transposant l'inverse

$= I\dfrac{1}{2}N + \dfrac{1}{2}NI$

$= N$.

b)La question précédente montre que toute matrice $N \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire sous la forme $f_a(M)$ avec $M = \dfrac{1}{2}N\ {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Donc si $N \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, alors $N \in Imf_a$.

Cela prouve l'inclusion : $\mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \subset Imf_a$.

On a vu dans la question 3)b) que $Imf_a \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

On a finalement : $Imf_A = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

5)Prenons pour A, la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Clairement, on a $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f_a(M) = 0$.

Donc f_a est l'application linéaire nulle et $Imf_a = \{0\} \neq \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

Partie B (étude d'un exemple)

6)a)A est triangulaire.

Ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux 1 et -1.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (A-I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(A-I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow y = 0$.

Donc $E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

• $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (A+I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(A+I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x+2y = 0 \iff y = -x.$

Donc $E_{-1}(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = -x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(A)$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

b)$A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admet deux VP distinctes donc est diagonalisable.

7)a)Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
f(M) &= A\,{}^tM + M\,{}^tA \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+2y & z+2t \\ -y & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+2y & -y \\ z+2t & -t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x+4y & -y+z+2t \\ -y+z+2t & -2t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b)Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
M \in Ker f &\iff f(M) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 2x+4y & -y+z+2t \\ -y+z+2t & -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x+4y = 0 \\ -y+z+2t = 0 \\ -2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -2y \\ -y+z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \mid x = -2z,\ y = z,\ t = 0 \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2z & z \\ z & 0 \end{pmatrix},\ z \in \mathbf{R} \right\}$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ z \in \mathbf{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $Kerf$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul, c'est donc une base de $Kerf$. Donc $dimKerf = 1$.

c)Le théorème du rang pour l'endomorphisme f de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ donne :

$\underbrace{dimKerf}_{=1} + dimImf = \underbrace{dim\mathscr{M}_2(\mathbf{R})}_{=4}$. Donc $dimImf = 3$.

Enfin, A est inversible (car 0 n'est pas valeur propre de A).

D'après la question 4)b), $\mathscr{S}_2(\mathbf{R}) = Imf$. Donc $dim\mathscr{S}_2(\mathbf{R}) = 3$.

8)a)Grâce au calcul fait en 7)a), on obtient :

$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_1$

$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 4e_1 - 1e_2 - 1e_3$

$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1e_2 + 1e_3$

$f(e_4) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2e_2 + 2e_3 - 2e_4.$

La matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$ est donc :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b)• Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Transformons $F - \lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$F - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$F - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$F-\lambda I \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \longleftarrow (1+\lambda)L_2 - L_3 \\ L_4 \end{array}$$

λ est valeur propre de F
$\iff F-\lambda I$ n'est pas inversible
$\iff 2-\lambda=0$ ou $-\lambda^2=0$ ou $-2-\lambda=0$
$\iff \lambda=2$ ou $\lambda=0$ ou $\lambda=-2$.
Les valeurs propres de F sont donc -2, 0 et 2.

• On cherche les sous-espaces propres de F. On pose $U=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$.

$E_{-2}(F)=\{U\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (F+2I)U=0\}$.

$$(F+2I)U=0 \iff \left\{\begin{array}{lll} 4x+4y & =0 & L_1 \\ y+z+2t & =0 & L_2 \\ -y+3z+2t & =0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cc} x=-y & L_1 \\ y+z+2t=0 & L_2 \\ 4z+4t=0 & L_3\longleftarrow L_2+L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{array}\right.$$

Donc $E_{-2}(F)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} \mid x=t, y=-t, z=-t\right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

$E_0(F)=\{U\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid FU=0\}$.

$$FU=0 \iff \left\{\begin{array}{ll} 2x+4y & =0 \\ -y+z+2t & =0 \\ -2t & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2z \\ y=z \\ t=0 \end{array}\right.$$

Donc $E_0(F)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} \mid x=-2z, y=z, t=0\right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$.

$E_2(F)=\{U\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (F-2I)U=0\}$.

$$(F-2I)U=0 \iff \left\{\begin{array}{ll} 4y & =0 \\ -3y+z+2t & =0 \\ -y-z+2t & =0 \\ -4t & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{array}\right.$$

Donc $E_2(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid xy = z = t = 0 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$ bases de $E_{-2}(F), E_0(F), E_2(F)$.

c)$dimE_{-2}(F) + dimE_0(F) + dimE_2(F) = 1 + 1 + 1 = 3$, mais $F \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, F n'est pas diagonalisable.

9)a)(S) s'écrit matriciellement sous la forme :
$X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On a vu dans la question 6) que A est diagonalisable.

La famille $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=V_2} \right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

Son cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
C'est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ et elle est formée de vecteurs propres de A car $V_1 \in E_1(A)$ et $V_2 \in E_{-1}(A)$.
D'après le cours, les solutions de (S) écrites en colonne sont de la forme :
$X(t) = \beta_1 e^{1t} V_1 + \beta_2 e^{-1t} V_2 = \beta_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} \\ -\beta_2 e^{-t} \end{pmatrix}$.
Ainsi, les solutions de (S) sont les couples (x, y) de fonctions de la forme :
$x(t) = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t}$ et $y(t) = -\beta_2 e^{-t}$, où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

b)• Les points d'équilibre de (S) sont les couples (x, y) de fonctions constantes solution de (S).
Pour tout $t \in \mathbf{R}$, posons donc $x(t) = a \in \mathbf{R}$ et $y(t) = b \in \mathbf{R}$.
On a alors $\forall t \in \mathbf{R},\ x'(t) = y'(t) = 0$.

(x, y) est solution de $(S) \iff \forall t \in \mathbf{R}, \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ \\ y'(t) = -y(t) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a + 2b \\ \\ 0 = -b \end{cases}$
$\iff a = b = 0$.
Donc $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre de (S).

• Prenons $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 0$ dans la question 9)b).

La solution de (S) qu'on obtient est $t \mapsto (e^t, 0)$.
Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$, la trajectoire associée à cette solution diverge.

Elle ne peut donc pas converger vers (0,0).

Donc (0,0) n'est pas asymptotiquement stable.

c1)• Quand t décrit $\mathbf{R}$, e^t décrit $]0, +\infty[$.

$T_1 = \left\{(e^t, 0),\ t \in \mathbf{R}\right\}$ est donc la demi-droite d'équation $y = 0$ où $x > 0$.

• Quand t décrit $\mathbf{R}$, e^{-t} décrit lui aussi $]0, +\infty[$.

$T_2 = \left\{(e^{-t}, -e^{-t}),\ t \in \mathbf{R}\right\}$ est donc la demi-droite d'équation $y = -x$ où $x > 0$.

c2)Pour $T_3 = \left\{e^t + e^{-t}, -e^{-t}),\ t \in \mathbf{R}\right\}$, il faut étudier les variations de $x : t \mapsto e^t + e^{-t}$ et $y : t \mapsto -e^{-t}$.

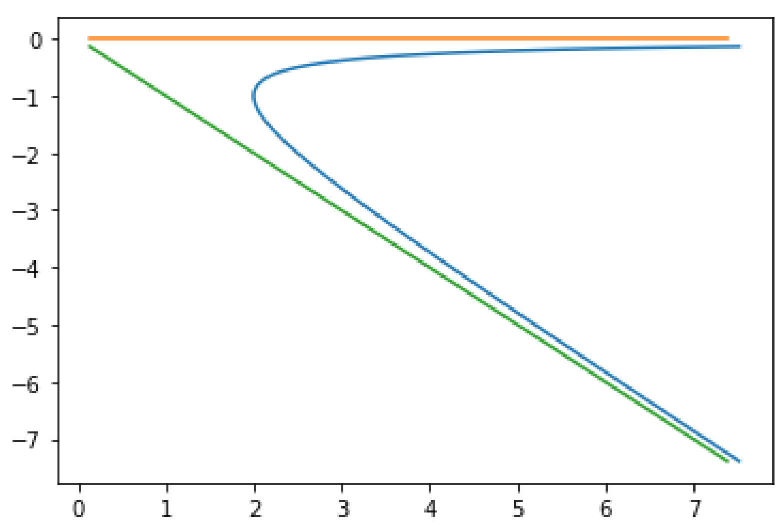
$\forall t \in \mathbf{R},\ x'(t) = e^t - e^{-t} \geq 0 \Longleftrightarrow e^t \geq e^{-t} \Longleftrightarrow t \geq -t \Longleftrightarrow t \geq 0$.

Donc x est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

$\forall t \in \mathbf{R},\ y'(t) = e^{-t} > 0$ donc y est croissante sur $\mathbf{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$ ↗	-1	↗ 0



Partie C (informatique)

1)Programme :

```
def quart(A):
    a=A[0,0]
    b=A[0,1]
    c=A[1,1]
    d=A[1,0]
    A=np.array(([d,a],[c,b]))
    return A
```

2)Programme :

```
def rotation(A,q):
    for k in range(q):
        A=quart(A)
    return(A)
```

3)Programme :

```
def jeu1(A):
    c=0
    q=0
    Aux=A
    manivelle=[]
    for k in range(10):
        q=q+rd.randint(1,5)
        manivelle.append(q)
        Aux=rotation(Aux,q)
        if np.array_equal(A,Aux)==True:
            c=c+1
    return manivelle,c
```

a)La liste `manivelle` est constituée de 10 entiers, correspondant aux nombres de quarts de tours cumulés après chacune des 10 rotations.

Le réel c est le nombre de fois où le test A=Aux est réalisé, c'est-à-dire le nombre de fois où A reprend sa forme initiale.

b)On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour que A reprenne sa forme initiale, il faut que le nombre de quart de tours cumulé effectué soit un multiple de 4.

La fonction `jeu1` retourne : manivelle=[1,**4**, **8**, 10, 14, 15, 19, 22, 25, 26].

C'est donc à la deuxième rotation et à la troisième rotation que A reprend sa forme initiale. La valeur de c retournée par la fonction est 2.

c)On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Attention ici, du fait de la symétrie de A, pour que A reprenne sa forme initiale, il faut que le nombre de quart de tours cumulé effectué soit un multiple de 2.

La fonction `jeu1` retourne : manivelle=[1, 3, **6**, **10**, 13, **14**, **18**, 19, **20**, **22**].

La valeur de c retournée par la fonction est 6.

4)Programme :

```
def jeu2(A):
    Aux=A
    mystere=[ ]
    for k in range(1,101):
        Aux=rotation(Aux,k)
        if np.array_equal(A,Aux)==True:
            mystere.append(k)
    return mystere[6]
```

a)Après k passages dans la boucle, le nombre de quart de tours effectué par la matrice A vaut :

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

b)On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

La liste `mystere` est composée des instants k où A reprend sa forme initiale,

c'est-à-dire des entiers k pour lesquels $\dfrac{k(k+1)}{2}$ est un multiple de 4,

ce qui se produit si et seulement si $k(k+1)$ est un multiple de 8 $\quad (*)$

k et $k+1$ étant des entiers consécutifs, l'un d'eux est pair et l'autre est impair.

si k est pair, c'est nécessairement k qui doit être multiple de 8,

si k est impair, c'est $k+1$ qui doit être multiple de 8.

La liste `mystere` vaut donc :

$[7, 8, 15, 16, 23, 24, \underbrace{31}_{mystere[6]}, 32, 39, 40, 47, 48, ...]$.

`mystere[6]` est le septième élément de la liste, il vaut 31.