Concours blanc ECRICOME

1 EXERCICE.

A tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Soit $E = \{M(a, b, c) \text{ avec } a, b, c \text{ réels}\}$.

1.1 Recherche d'une base de E.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

1.2 Cas particulier de la matrice $M(1, 2, 3)$.

1. Donner les valeurs propres de $M(1, 2, 3)$.
2. Déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$D = P^{-1} M(1,2,3) P$$

3. Donner l'expression de P^{-1}. En déduire la matrice $[M(1, 2, 3)]^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire l'expression de J^n, pour tout entier $n \geq 3$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$[M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

   L'écriture obtenue est-elle encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$?
3. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$.

1.4 Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 2)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M(1, 1, 2)$.
On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par : $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{w})$.
3. Exprimer $f(\vec{v})$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la matrice de passage R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ a pour matrice inverse :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Donner une relation reliant les matrices $M(1,1,2)$, Q, R et T.
7. Sans l'expliciter, écrire $[M(1,1,2)]^n$ en fonction de n, Q, R, T.

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :
   $$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$
6. Proposer un programme en Python encadrant α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question **I.5.** On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\[2em] f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance $E(X)$.
3. Démontrer que pour $x > \alpha$:
   $$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$
   En déduire que l'espérance de X est donnée par :
   $$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$
   Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.
4. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?

Exercice 3

On s'intéresse à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

1. **Premier jeu**

   Pour ce premier jeu, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité 1/10, perdue avec la probabilité 9/10.

   Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

   (a) Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de $E(X_N)$ et $V(X_N)$.

   (b) Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire $E(Y_N)$ et $V(Y_N)$.

   (c) La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.

      i. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

      ii. A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (utiliser l'annexe à la fin).

2. **Deuxième jeu**

   Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1.
   Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

   $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à 1/5 de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.

   (b) Déterminer l'espérance de X_i.

   (c) Pour tout réel t, exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$.

(d) Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.

(e) Quelle est la probabilité de $G =$"le joueur gagne la partie" ?

3. **Troisième jeu**

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $1/N$. Une case peut contenir plusieurs boules.

On étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

(a) Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

(b) Donner les lois de T_1 et T_2.

(c) Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1], [T_n = 2], [T_n = n]$ (distinguer deux cas $n > N$ et $n \leq N$).

(d) A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$(I) \qquad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1])$$

(e) Soit G_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k]) x^k$$

i. Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

ii. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.

iii. En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2) G'_n(x) + x G_n(x)$$

iv. En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$E(T_{n+1}) = (1 - \frac{1}{N}) E(T_n) + 1$$

v. Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :

$$E(T_n) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right]$$

Table de Poisson des probabilités cumulées : $\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	$0,0498$	$0,0183$	$0,0067$	$0,0025$	$0,0009$
1	$0,1991$	$0,0916$	$0,0404$	$0,0174$	$0,0073$
2	$0,4232$	$0,2381$	$0,1247$	$0,0620$	$0,0296$
3	$0,6472$	$0,4335$	$0,2650$	$0,1512$	$0,0818$
4	$0,8153$	$0,6288$	$0,4405$	$0,2851$	$0,1730$
5	$0,9161$	$0,7851$	$0,6160$	$0,4457$	$0,3007$
6	$0,9665$	$0,8893$	$0,7622$	$0,6063$	$0,4497$
7	$0,9881$	$0,9489$	$0,8666$	$0,7440$	$0,5987$
8	$0,9962$	$0,9786$	$0,9319$	$0,8472$	$0,7291$
9	$0,9989$	$0,9919$	$0,9682$	$0,9161$	$0,8305$
10	$0,9997$	$0,9972$	$0,9863$	$0,9574$	$0,9015$
11	$0,9999$	$0,9991$	$0,9945$	$0,9799$	$0,9467$
12	$1,0000$	$0,9997$	$0,9980$	$0,9912$	$0,9730$
13		$0,9999$	$0,9993$	$0,9964$	$0,9872$
14		$1,0000$	$0,9998$	$0,9986$	$0,9943$
15			$0,9999$	$0,9995$	$0,9976$
16			$1,0000$	$0,9998$	$0,9990$
17				$0,9999$	$0,9996$
18				$1,0000$	$0,9999$
19					$1,0000$